Université Abdelmalek Essaadi
Faculté des Sciences et Techniques
Tanger

Année 2010-2011
Module M111
MIPC

Série n° 7

Exercice 1.
Résoudre les systèmes :

$$a)\ \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{array}\right. ;\ b)\ \left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{array}\right. ;\ c)\ \left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{array}\right. ;$$

$$d)\ \left\{\begin{array}{l} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \end{array}\right. ;\ e)\ \left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4 \end{array}\right. .$$

Exercice 2.
Résoudre les systèmes suivants par la règle de Cramer :

$$a)\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 = -1 \end{array}\right. ;b)\ \left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{array}\right. ;c)\ \left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 2 \end{array}\right. .$$

Exercice 3.
Résoudre les systèmes :

$$a)\ \left\{\begin{array}{c} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{array}\right. ;b)\ \left\{\begin{array}{c} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{array}\right. .$$

Exercice 4.
Résoudre les systèmes à un paramètre m :

$$a)\ \left\{\begin{array}{c} x_1 + x_2 + (2m-1)x_3 = 1 \\ mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 3(m+1) \end{array}\right. ;b)\ \left\{\begin{array}{c} x_1 - mx_2 + m^2x_3 = m \\ mx_1 - m^2x_2 + mx_3 = 1 \\ mx_1 + x_2 - m^3x_3 = 1 \end{array}\right. .$$

– – – – – – –



Correction de la série $n°7$.
Exercice 1.

$a)$ La matrice du système :

$$(a)\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1\\ x_1-x_2+x_3=1\\ -x_1+x_2-x_3=1\end{cases}$$

est $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$; sa matrice augmentée est : $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&-1&1&1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$.

Réduisons la marice $\widetilde{A}$ en une matrice "étagée", par des opérations élémentaires sur les lignes :

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&-1&1&1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[L_3\longleftarrow L_3+L_1]{L_2\longleftarrow L_2-L_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&2&0\\0&2&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\longleftarrow L_3+L_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix};$$

$rg(A)=2$ et $rg(\widetilde{A})=3$; donc le système (a) n'a pas de solution.

$b)$ La matrice et la matrice augmentée du système

$$(b)\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=2\\ x_1+2x_2+x_3=-2\\ 2x_1-x_2-x_3=-2\end{cases}$$

sont respectivement $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&2&1\\2&-1&-1\end{pmatrix}$ et $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&2\\1&2&1&-2\\2&-1&-1&-2\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&2\\1&2&1&-2\\2&-1&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[L_3\longleftarrow L_3-2L_1]{L_2\longleftarrow L_2-L_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&2\\0&3&-1&-4\\0&1&-5&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\leftrightarrows L_3}\begin{pmatrix}1&-1&2&2\\0&1&-5&-6\\0&3&-1&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\longleftarrow L_3-3L_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&2\\0&1&-5&-6\\0&0&14&14\end{pmatrix}.$$

Comme $rg(A)=rg(\widetilde{A})\ (=3)$, le système (b) admet au moins une solution; l'ensemble S des solutions de (b) coïncide avec celui du système :

$$(b')\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=2\\ x_2-5x_3=-6\\ x_3=1\end{cases};$$

ainsi $S=\{(x_1=-1\ ,x_2=-1,\ x_3=1)\}$.

$c)$ Le système

$$(c)\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=0\\ 7x_1+6x_2+5x_3=0\\ 5x_1+4x_2+3x_3=0\end{cases}$$

est homogène; sa matrice est : $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\7&6&5\\5&4&3\end{pmatrix}$.



$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftarrow L_1 - L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 - 5L_1]{L_2 \longleftarrow L_2 - 7L_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \longleftarrow \frac{1}{4}L_3]{L_2 \longleftarrow \frac{1}{6}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \longleftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Le système (c) est donc équivalent au système :

$$(c') \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

dont l'ensemble des solutions est : $S = \{(x_1 = t, x_2 = -2t, x_3 = t) \ / \ t \in \mathbb{R}\}$; c'est la droite passant par l'origine O et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) La matrice du système

$$(d) \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

est $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; sa matrice augmentée est $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftarrow -L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1]{L_2 \longleftarrow L_2 - 5L_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 16 & -2 & 17 \\ 0 & -8 & 1 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 16 & -2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
Le système (d) est incompatible car $rg(A) \neq rg(\widetilde{A})$.

e) Pour le système $(e) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases}$ la matrice et la matrice augmentée sont $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrows L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
$rg(A) = rg(\widetilde{A})$ $(= 2)$; donc le système (e) est compatible et est équivalent au système :

$$(e') \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_2 - 7x_3 = -5 \end{cases}$$



On a : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_2 - 7x_3 = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 11x_3 - 8 \\ x_2 = -7x_3 + 5 \end{cases}$; donc l'ensemble des solutions du système (c) est :

$$S = \{(x_1 = 11t - 8, x_2 = -7t + 5, x_3 = t) \,/\, t \in \mathbb{R}\}.$$

C'est la droite passant par le point de coordonnées (-8, 5, 0) et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

a) Pour le système $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$ on a :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{2} = -3.$$

b) La solution du système $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ est :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}.$$

On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -10,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6;$$

donc ($x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$).

c) Pour le système $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 2 \end{cases}$ on a :



$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}} ; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}} ; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -13 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -44$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & -10 & -8 \end{vmatrix} = 36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & -10 \end{vmatrix} = -4;$$

donc $(x_1 = -11, x_2 = 9, x_3 = -1)$.

– – – – – – –

Exercice 3.

La matrice et la matrice augmentée du système :

$$(a) \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

sont $A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrows L_4} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & -2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \longleftarrow L_4 + 7L_1]{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \longleftarrow L_4 - 5L_1]{L_2 \longleftarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \longleftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$



Le système (a) est compatible car $rg(A) = rg(\widetilde{A})$ $(= 2)$ et il est équivalent à :

$$(a') \quad \begin{cases} -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases} ;$$

donc l'ensemble des solutions de (a) est :

$$S = \{(x_1 = -1 + s + 2t,\ x_2 = -3 + s + 2t,\ x_3 = s,\ x_4 = t) \ / \ s,t \in \mathbb{R}\}.$$

$b)$ La matrice et la matrice augmentée du système :

$$(b) \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

sont $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 6 \\ 9 & 12 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 6 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 6 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2}$$

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$; le système (b) n'a pas de solutions est car $rg(A) \neq rg(\widetilde{A})$.

– – – – – – – –

Exercice 4.

$a)$ Le déterminant de la matrice du système $(a) \begin{cases} x_1 + x_2 + (2m-1)x_3 = 1 \\ mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 3(m+1) \end{cases}$

est :

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 0 & 1-m & -m(2m-1)+1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 0 & 1-m & -m(2m-1)+ \\ 0 & m-1 & 2(-m+1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 0 & 1-m & -m(2m-1)+1 \\ 0 & 0 & -2m^2-m+3 \end{vmatrix} = (1-m)(-2m^2-m+3) = (1-m)^2(2m+3)$$

1er cas : $m = 1$.



Dans ce cas le système (a) s'écrit :

$$(1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases} ;$$

Il est clair que ce système n'admet pas de solutions.

2ème cas : $m = -\frac{3}{2}$.
Dans ce cas le système (a) s'écrit :

$$(2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases} ;$$

sa matrice est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et sa matrice augmentée est : $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \longleftarrow L_2 + 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & 5 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \longleftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système (1) est compatible car $rg(A) = rg(\widetilde{A})\ (= 2)$; il est équivalant au système :

$$(2')\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

dont l'ensemble des solutions est : $S = \{(x_1 = 2t+1, x_2 = 2t, x_3 = t)\ /\ t \in \mathbb{R}\}$; c'est la droite passant par le point de coordonnées $(1, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3ème cas : $(1-m)(2m+3) \neq 0$.
Dans ce cas le système (a) est de Cramer; sa solution est :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3(m+1) & m & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 3(m+1) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 3(m+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}.$$

On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3(m+1) & m & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 0 & 0 & -2(m-1) \\ 3(m+1) & m & 1 \end{vmatrix}$$



$= 2(m-1)(m-3(m+1)) = -2(m-1)(2m+3)$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 3(m+1) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 0 & 1-m & 1-m(2m-1) \\ 1 & 3(m+1) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 0 & 1-m & 1-m(2m-1) \\ 0 & 3m+2 & -2(m-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-m & 1-m(2m-1) \\ 3m+2 & -2(m-1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-m & (2m+1)(-m+1) \\ 3m+2 & -2(m-1) \end{vmatrix} = (1-m)\begin{vmatrix} 1 & 2m+1 \\ 3m+2 & -2(m-1) \end{vmatrix}$$

$= (1-m)(-2(m-1)-(2m+1)(3m+2)) = -3m(1-m)(2m+3)$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 3(m+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1-m & 1 \\ 1 & m-1 & 3(m+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1-m & 1-m \\ 1 & m-1 & 3m+2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1-m & 1-m \\ m-1 & 3m+2 \end{vmatrix} = (1-m)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m-1 & 3m+2 \end{vmatrix} = (1-m)(2m+3);$$

donc $x_1 = \frac{-2(m-1)(2m+3)}{(1-m)^2(2m+3)} = \frac{2}{1-m}, x_2 = \frac{-3m}{1-m}, x_3 = \frac{1}{1-m}$.

$b)$ Le déterminant de la matrice du système (b) $\begin{cases} x_1 - mx_2 + m^2x_3 = m \\ mx_1 - m^2x_2 + mx_3 = 1 \\ mx_1 + x_2 - m^3x_3 = 1 \end{cases}$ est :

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 1 & -m & 1 \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 0 & 0 & 1-m^2 \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} =$$

$$m(m^2-1)\begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{vmatrix} = m(m^2-1)(1+m^2).$$

1er cas : $m = 0$.

Dans ce cas le système (b) s'écrit :

$$(1) \begin{cases} x_1 = 0 \\ 0 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases};$$

(b) n'admet pas de solutions.

2ème cas : $m = 1$.

Dans ce cas le système (b) s'écrit :

$$(2) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases};$$

sa matrice est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et sa matrice augmentée est : $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$





$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 - L_1]{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightleftarrows L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système (2) est compatible et il est équivalent au système :

$$(2') \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} ;$$

donc ensemble de solutions est : $S = \{(x_1 = 1, x_2 = t, x_3 = t)\}$.

3ème cas : $m = -1$.

Dans ce cas le système (b) s'écrit :

$$(3) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} ;$$

sa matrice est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et sa matrice augmentée est : $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 + L_1]{L_2 \longleftarrow L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

Le système (3) est compatible et il est équivalent au système :

$$(3') \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} ;$$

donc ensemble de solutions est : $S = \{(x_1 = -1, x_2 = t, x_3 = -t)\}$.

4ème cas : $m(m^2 - 1) \neq 0$.

Dans ce cas le système (b) est de Cramer, sa solution est :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} m & -m & m^2 \\ 1 & -m^2 & m \\ 1 & 1 & -m^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & 1 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -m & m \\ m & -m^2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix}}.$$

On a :

$$\begin{vmatrix} m & -m & m^2 \\ 1 & -m^2 & m \\ 1 & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -m^2 & m \\ m & -m & m^2 \\ 1 & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -m^2 & m \\ 0 & -m + m^3 & 0 \\ 1 & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -m^2 & m \\ 0 & -m + m^3 & 0 \\ 0 & 1 + m^2 & -m^3 - m \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -m + m^3 & 0 \\ 1 + m^2 & -m^3 - m \end{vmatrix} = (m^3 - m)(m^3 + m^2)$$



$$\begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & 1 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ 0 & 1-m^2 & m-m^3 \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ 0 & 1-m^2 & m-m^3 \\ 0 & 1-m^2 & -2m^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ 0 & 1-m^2 & m- \\ 0 & 0 & -m^3 \end{vmatrix}$$

$= -(1-m^2)(m^3+m)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -m & m \\ m & -m^2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -m & m \\ 0 & 0 & 1-m^2 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-m)\begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{vmatrix}$$

$= -(1-m^2)(m^2+1)$; donc

$x_1 = \frac{(m^3-m)(m^3+m)}{m(m^2-1)(1+m^2)} = m$, $x_2 = \frac{-(1-m^2)(m^3+m)}{m(m^2-1)(1+m^2)} = 1$ et $x_3 = \frac{-(1-m^2)(m^2+1)}{m(m^2-1)(1+m^2)} = \frac{1}{m}$.

– – – – – – –

